

Trouver les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x - \ln x)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh} x)} - \sqrt[3]{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1]}{\ln x}$

a)  $x - \ln x \sim -\ln x$  car  $\lim_0 \frac{x - \ln x}{-\ln x} = \lim_0 \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right) = 1$

Donc  $\frac{1}{x(x - \ln x)^n} \sim \frac{1}{x(-\ln x)^n} \rightarrow +\infty$ .

Ccl :  $\boxed{\lim_{0^+} \frac{1}{x(x - \ln x)^n} = +\infty}$

b) On utilise l'identité  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

$$\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh} x)} - \sqrt[3]{x} = \frac{\ln(\operatorname{sh} x) - x}{(\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh} x)})^2 + \sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh} x)}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

car le dénominateur tend vers  $+\infty$ , et le numérateur s'écrit :

$$\ln(\operatorname{sh} x) - x = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x = \ln \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2} - x = \ln \frac{1 - e^{-2x}}{2}$$

qui tend vers  $\ln \frac{1}{2}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

2<sup>e</sup> solution :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2} \Rightarrow \ln \operatorname{sh} x = x - \ln 2 + \ln(1 - e^{-2x})$$

$$= x - \ln 2 - e^{-2x} + o(e^{-2x})$$

$$\text{donc } \sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} = \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{\ln 2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{x} \left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$1 + \frac{1}{3} o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

soit :  $\sqrt[3]{\ln shx} = \sqrt[3]{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

de sorte que  $\sqrt[3]{\ln shx} - \sqrt[3]{x} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{\ln shx} - \sqrt[3]{x}) = 0}$

c) Pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{x} \ln(1+x) + o\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$$

d'où  $(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x} \ln(1+x) \sim \frac{\ln x}{x}$

et  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1]}{\ln x} = 1}$